

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Дальневосточное отделение
Вычислительный центр

И.И. Потапов

К.С. Снигур

Г.И. Цой

**ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ
ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА
НАД ПОЛОГИМИ ДЮНАМИ**

Препринт № 231

Хабаровск, 2019

УДК 532.54

Потапов И.И., Снигур К.С., Цой Г.И. Особенности моделирования турбулентного потока над пологими дюнами: препринт № 231. – Хабаровск: Вычислительный центр ДВО РАН, 2019. – 28 с.

В настоящей работе предложена математическая модель задачи о движении двумерного турбулентного потока жидкости в напорном канале с волнистым дном. Математическая модель включает в себя уравнения Рейнольдса, переноса кинетической энергии и диссипации турбулентности, приведенные к квазигидродинамическому виду. Предложен алгоритм решения задачи с помощью метода контрольных объемов и метода конечных элементов. Численно решена задача о движении турбулентного потока над неподвижными пологими песчаными дюнами. Выполнено сравнение полученных расчетов с экспериментальными данными.

Библиогр. 33 назв.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ
(коды проектов 18-05-00530, 18-35-00139)

Ответственный редактор докт. физ.-мат. наук

Намм Р.В.

© Потапов И.И., Снигур К.С., Цой Г.И.

© Вычислительный центр ДВО РАН

Введение

Речные дюны оказывают значительное влияние на характер речного потока [1, 2] и, соответственно, на транспорт донных наносов и формирование дна [3, 4]. Дюны условно делятся на крутые дюны, у которых угол подветренного склона близок к углу внутреннего трения (~ 30 градусов), и пологие дюны, у которых угол подветренного склона меньше угла внутреннего трения (< 30 градусов) [5].

Пологие дюны с углом подветренного склона, не превышающим 10 градусов, являются самой распространённой донной формой в больших реках с песчаным дном [6, 7]. Однако исследователи расходятся в вопросе о структуре потока за такими пологими дюнами. Натурные исследования [8, 9] показывают, что за пологими дюнами отсутствует постоянная зона отрыва потока, вместо нее присутствует зона замедления потока с непостоянным образованием отрыва потока. В то же время исследования [10, 11, 5] не обнаружили никакого (даже непостоянного) отрыва потока за пологими дюнами. Следовательно, нет однозначного ответа в вопросе о вкладе пологих дюн в сопротивление потока. Ряд исследователей [12, 13, 14] полагают, что дюны с пологим подветренным склоном и длиной, превышающей глубину потока, не вносят вклад в сопротивление потока. Однако, в работе [15] авторы выполнили экспериментальное исследование, в котором показали, что вклад пологих дюн в общее сопротивление является не большим, но существенным и пренебрежение им приведет к занижению расчетного сопротивления потока по сравнению с реальным.

Настоящая работа нацелена на развитие математической модели, описывающей движение турбулентного гидродинамического потока при его прохождении над пологими песчаными дюнами.

1. Математическая постановка задачи

Рассмотрим движение турбулентного гидродинамического потока в напорном канале длиной L и максимальной высотой H , поток движется

слева направо вдоль оси x . Дно канала Γ_{in} имеет геометрически сложную форму. На рис. 1 показана расчетная область задачи Ω , где Γ_{in} , Γ_{out} , Γ_{top} и Γ_{bed} – входная, выходная, верхняя и нижняя границы расчетной области.

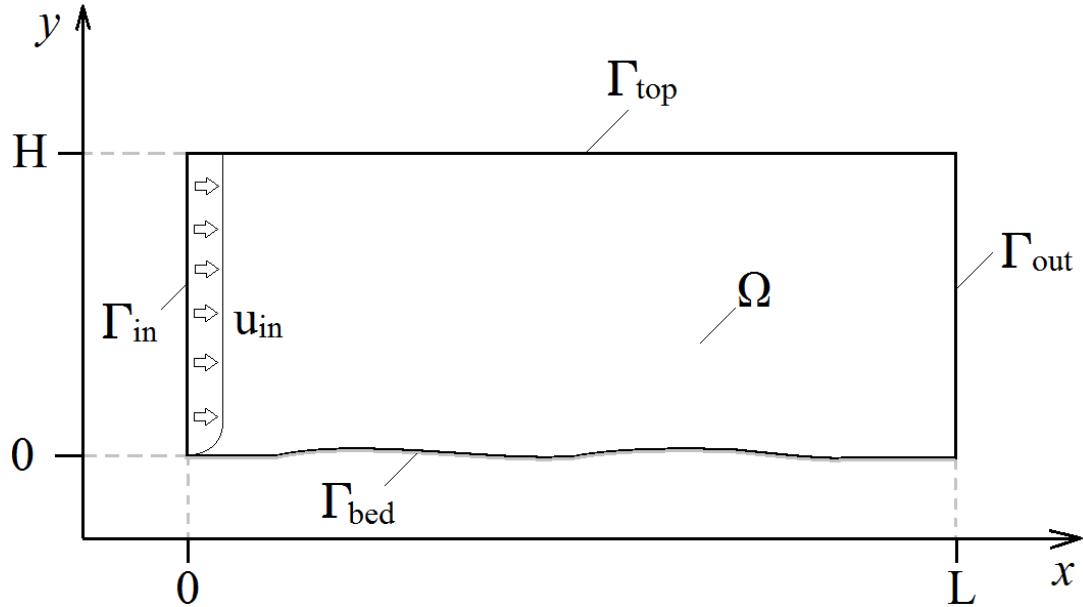


Рис. 1. – Расчетная область

Для описания движения осредненного гидродинамического потока воспользуемся уравнениями Рейнольдса, приведенными к квазигидродинамическому виду [16]

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right], \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{2}{3} k \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(2\eta \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(2u\omega_x + \frac{2}{3} \omega_k \right) + \frac{\partial}{\partial y} (v\omega_x + u\omega_y), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(p + \frac{2}{3} k \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial y} + \eta \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(2\eta \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial x} (v\omega_x + u\omega_y) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2v\omega_y + \frac{2}{3} \omega_k \right). \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнениях (1)-(3) x и y – пространственная горизонтальная и вертикальная координаты соответственно, u и v – горизонтальная и

вертикальная скорости потока соответственно, ρ – плотность воды, p – давление воды, $\eta = \eta_t + \eta_{mol}$ – приведенная кинетическая вязкость, состоящая из суммы турбулентной вязкости η_t и молекулярной вязкости $\eta_{mol} = 10^{-6}$ м²/с, k – кинетическая энергия турбулентности, σ – параметр регуляризации.

Для замыкания уравнений (1)-(3) и определения турбулентной вязкости η_t воспользуемся стандартной моделью турбулентности $k - \varepsilon$ [17]. Приведем уравнения переноса кинетической энергии и диссипации турбулентности к квазигидродинамическому виду с помощью метода [16]

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial ku}{\partial x} + \frac{\partial kv}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\eta_t}{\sigma_k} + \eta_{mol} \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\eta_t}{\sigma_k} + \eta_{mol} \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] + P_k - \varepsilon + \\ + \frac{\partial}{\partial x} [k\omega_x + u\omega_k] + \frac{\partial}{\partial y} [k\omega_y + v\omega_k], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon u}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\eta_t}{\sigma_\varepsilon} + \eta_{mol} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\eta_t}{\sigma_\varepsilon} + \eta_{mol} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + \\ + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x} [\varepsilon\omega_x + u\omega_\varepsilon] + \frac{\partial}{\partial y} [\varepsilon\omega_y + v\omega_\varepsilon], \end{aligned} \quad (5)$$

$$\eta_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad P_k = \sqrt{2} \eta_t \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right), \quad (6)$$

$$\omega_x = \sigma \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x} \right), \quad \omega_y = \sigma \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial y} \right), \quad (7)$$

$$\omega_k = \sigma \left(u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial x} - (P_k - \varepsilon) \right), \quad \omega_\varepsilon = \sigma \left(u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \right), \quad (8)$$

Здесь ε – диссипация турбулентности, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $C_\mu = 0.09$, $C_{\varepsilon 1} = 1.44$, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ - константы [18].

Математическая постановка замыкается следующими начальными условиями

$$u = u_0, \quad v = 0, \quad k = k_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (9)$$

и граничными условиями

$$u = u_{in}, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = q_p, \quad k = k_{in}(u), \quad \varepsilon = \varepsilon_{in}(k), \quad (x, y) \in \Gamma_{in}, \quad (10)$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad k = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{bed}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{top} \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad p = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_{out} \quad (13)$$

где $u_0, v_0, k_0, \varepsilon_0$ – поля начальных значений для искомых функций, q_p – значение градиента давления на входе в область, $u_{in}, v_{in}, k_{in}, \varepsilon_{in}$ – профили функций на входе в область, $\Gamma_{in}, \Gamma_{out}, \Gamma_{top}$ и Γ_{bed} – входная, выходная, верхняя и нижняя границы расчетной области.

2. Граничные условия

Для описания профиля горизонтальной скорости потока на входе в расчетную область использовалась степенная формула [19]

$$u_{in} = \frac{N+2}{N+1} u_{cp} \left[1 - \left(\frac{y-0.5H}{0.5H} \right)^{N+1} \right], \quad N = \frac{H^2 q_p}{\rho \eta u_{cp}} - 2, \quad (14)$$

где u_{cp} – средняя горизонтальная скорость потока. Коэффициент $N \geq 1$ определяет вид профиля (от параболического к степенному).

Если градиент давления q_p на входе в область известен, то можно явно определить коэффициент N . Если градиент давления не известен, но известен экспериментальный профиль скорости, то можно определить значение N из наилучшего согласования профиля скорости (14) с экспериментальным профилем. Затем, по известному значению N можно определить значение градиента давления по формуле

$$q_p = -\frac{(2+N)}{H^2} \rho \eta u_{cp}. \quad (15)$$

Можно воспользоваться альтернативной формулой распределения горизонтальной скорости. Исходя из того, что в настоящей задаче рассматривается течение воды в закрытом плоском канале, где профиль вязкости имеет форму, близкую к параболической [20-22]

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{y^2}{H^2} \right),$$

можно из соотношений и допущений

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = q_p, \quad u(0, H - a) = u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}},$$

$$(H - a)^2 \approx H^2 - 2ha, \quad a \approx 2d$$

получить следующую зависимость

$$u = \frac{h^2}{2\mu_0} \ln \left(\frac{2ha - a^2}{h^2 - y^2} \right) q_p - \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (16)$$

где $\mu = \eta\rho$ – приведенная динамическая вязкость потока, μ_0 – максимальное значение приведенной динамической вязкости потока, a – глубина активного слоя, u_τ – придонная горизонтальная скорость потока, τ_w – придонное касательное напряжение потока, d – диаметр частиц грунта.

Профили кинетической энергии и диссипации турбулентности на входе в область можно задать следующим образом [23, 24]

$$k_{in} = 0.005u_{in}^2, \quad \varepsilon_{in} = 0.1k_{in}^2. \quad (17)$$

3. Дискретизация расчетной области

Для численного решения уравнений (1)-(8) расчетная область дискретизируется с помощью регулярной сетки треугольных элементов, фрагмент сетки показан на рис. 2.

На основе сетки треугольных элементов Ω_i формируется сетка контрольных объемов V_k . Каждый контрольный объем V_k построен вокруг одного узла сетки K путем соединения центров масс P_i смежных треугольных элементов Ω_i , $i = 1..m$, где m – количество треугольников,

имеющих одну вершину K , как показано на рис. 3. Нумерация узлов контрольного объема и узлов треугольных элементов выполняется против часовой стрелки. Координаты центра массы треугольника и значение функции F в нем можно определить по формулам

$$\{x_{pn}, y_{pn}\} = \left\{ \frac{x_{n1} + x_{n2} + x_{n3}}{3}, \frac{y_{n1} + y_{n2} + y_{n3}}{3} \right\}, \quad F_{pn} = \frac{F_{n1} + F_{n2} + F_{n3}}{3}, \quad (18)$$

где $n1, n2, n3$ – номера узлов, являющимися вершинами треугольника Ω_n .

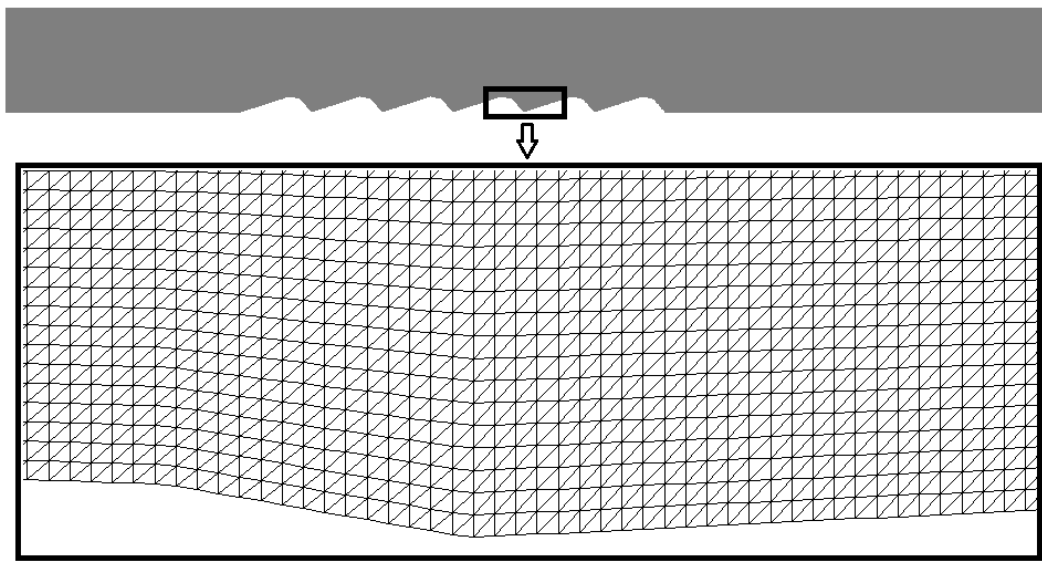


Рис.2. – Фрагмент расчетной сетки

Рассмотрим два смежных треугольных элемента Ω_1 и Ω_2 на рис. 4. Узлы $K(x_K, y_K)$, $1(x_1, y_1)$ и $2(x_2, y_2)$ образуют треугольник Ω_1 , $K(x_K, y_K)$, $2(x_2, y_2)$ и $3(x_3, y_3)$ – треугольник Ω_2 . Рассматриваемые треугольники имеют общую грань $K2$. Центры масс треугольников располагаются в точках $P_1(x_{P1}, y_{P1})$ и $P_2(x_{P2}, y_{P2})$ и образуют грань контрольного объема P_1P_2 длиной L_{k2} , вектор $\vec{n}(n_x, n_y)$ – вектор нормали к грани контрольного объема P_1P_2 , вектор $\vec{l}(l_x, l_y)$ – касательный вектор к грани контрольного объема P_1P_2 . Точка пересечения

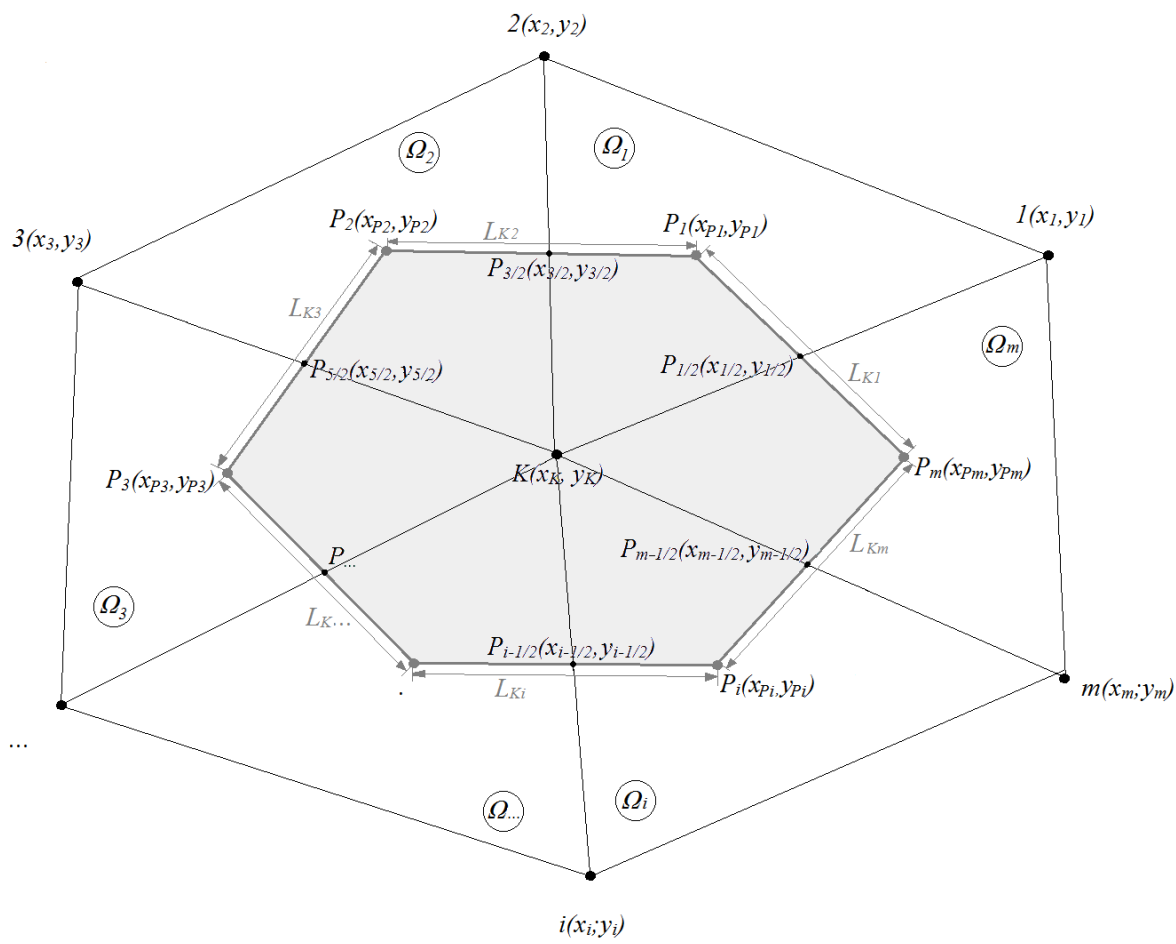


Рис. 3. – Ячейка контрольного объема V_K , ограниченного контуром L_K

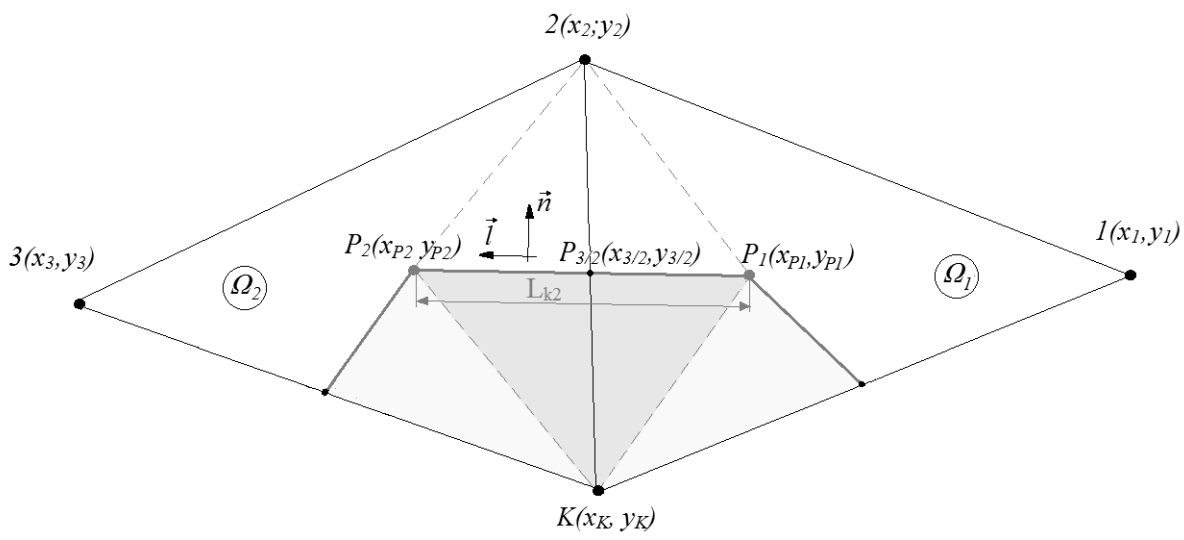


Рис. 4. – Два смежных треугольника Ω_1 и Ω_2 , составляющие часть контрольного объема V_K

общей грани треугольников $K2$ и грани контрольного объема P_1P_2 обозначена как $P_{3/2}(x_{3/2}, y_{3/2})$, ее координаты вычисляются по формулам

$$x_{3/2} = x_K + \beta(x_2 - x_K), \quad y_{3/2} = y_K + \beta(y_2 - y_K), \quad (19)$$

где

$$\beta = -\frac{(y_{P_2} - y_{P_1})(x_K - x_{P_2}) + (x_{P_1} - x_{P_2})(y_K - y_{P_2})}{(y_{P_2} - y_{P_1})(x_2 - x_K) + (x_{P_1} - x_{P_2})(y_2 - y_K)}. \quad (20)$$

Площадь треугольника KP_1P_2 можно найти следующим образом

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}((x_{P_2} - x_K)(y_{P_1} - y_K) - (x_{P_1} - x_K)(y_{P_2} - y_K)). \quad (21)$$

Значение функции F в точке $P_{3/2}$ вычисляются как

$$F(P_{3/2}) = \alpha F_K + (1 - \alpha)F_2, \quad (22)$$

$$\alpha = \frac{|(x_K - x_{3/2})n_x + (y_K - y_{3/2})n_y|}{|(x_K - x_{3/2})n_x + (y_K - y_{3/2})n_y + (x_{3/2} - x_2)n_x + (y_{3/2} - y_2)n_y|}, \quad (23)$$

$$n_x = \frac{y_{P_2} - y_{P_1}}{\sqrt{(x_{P_2} - x_{P_1})^2 + (y_{P_2} - y_{P_1})^2}}, \quad n_y = \frac{x_{P_1} - x_{P_2}}{\sqrt{(x_{P_2} - x_{P_1})^2 + (y_{P_2} - y_{P_1})^2}}. \quad (24)$$

где F_K – значение функции в вершине K , F_2 – в вершине 2.

Производные от функции F в точке $P_{3/2}$ находятся с помощью метода конечных разностей по формуле [25]

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(F_{P_2} - F_{P_1})(y_K - y_2) + (F_2 - F_K)(y_{P_2} - y_{P_1})}{2S_{\omega}}, \quad (25)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{(F_{P_2} - F_{P_1})(x_2 - x_K) + (F_2 - F_K)(x_{P_1} - x_{P_2})}{2S_{\omega}}, \quad (26)$$

$$S_{\omega} = \frac{1}{2}((x_K - x_2)(y_{P_1} - y_{P_2}) + (x_{P_1} - x_{P_2})(y_2 - y_K)), \quad (27)$$

где F_{P_1} и F_{P_2} – значения функции F в точках P_1 и P_2 соответственно, F_2 – значение функции F в точке 2, F_K – значения функции F в точках K , S_{ω} – площадь четырехугольника KP_1P_2 .

4. Алгоритм решения уравнений переноса

Следуя технологии построения дискретного аналога с помощью метода контрольных объемов [25], с учетом (18)-(27) дискретные аналоги для уравнений (2)-(5) принимают вид

$$u_K^{n+1} = v_K^n + \frac{\Delta t}{S_K} \sum_{i=1/2}^{m-1/2} \left[-u^2 n_x - u v n_y - \frac{1}{\rho} p n_x - \frac{2}{3} k n_x + \eta \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) n_x + \right. \\ \left. + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y + \left(2u \omega_x + \frac{2}{3} \omega_k \right) n_x + (v \omega_x + u \omega_y) n_y \right] L_{Ki+1/2}, \quad (28)$$

$$v_K^{n+1} = v_K^n + \frac{\Delta t}{S_K} \sum_{i=1/2}^{m-1/2} \left[-u v n_x - v^2 n_y - \frac{1}{\rho} p n_y - \frac{2}{3} k n_y + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \right. \\ \left. + \eta \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) n_y + (v \omega_x + u \omega_y) n_x + \right. \\ \left. + \left(2v \omega_y + \frac{2}{3} \omega_k \right) n_y \right] L_{Ki+1/2}, \quad (29)$$

$$k_K^{n+1} = k_K^n + \Delta t (P_{kK}^n - \varepsilon_K^n) + \\ + \frac{\Delta t}{S_K} \sum_{i=1/2}^{m-1/2} \left[-k u n_x - k v n_y + \left(\frac{\eta_t}{\sigma_k} + \eta_{mol} \right) \left(\frac{\partial k}{\partial x} n_x + \frac{\partial k}{\partial y} n_y \right) + (k \omega_x + u \omega_k) n_x + (k \omega_y + v \omega_k) n_y \right] \times \\ \times L_{Ki+1/2}, \quad (30)$$

$$\varepsilon_K^{n+1} = \varepsilon_K^n + \Delta t \frac{\varepsilon_K^n}{k_K^n} (C_{\varepsilon 1} P_{kK}^n - C_{\varepsilon 2} \varepsilon_K^n) + \\ + \frac{\Delta t}{S_K} \sum_{i=1/2}^{m-1/2} \left[-\varepsilon u n_x - \varepsilon v n_y + \left(\frac{\eta_t}{\sigma_\varepsilon} + \eta_{mol} \right) \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} n_y \right) + (\varepsilon \omega_x + u \omega_\varepsilon) n_x + (\varepsilon \omega_y + v \omega_\varepsilon) n_y \right] \times \\ \times L_{Ki+1/2}, \quad (31)$$

где n – временной слой разностной схемы, K – центральный узел контрольного объема, S_K – суммарная площадь контрольного объема, m – количество граней контрольного объема, n_x, n_y – компоненты вектора нормали к соответствующей грани контрольного объема, $L_{Ki+1/2}$ – длина соответствующей грани контрольного объема.

5. Алгоритм решения уравнения для давления

Для расчета давления в узлах расчетной сетки воспользуемся методом конечных элементов в слабой формулировке Галеркина [26, 27]. На рис. 5 показан конечный элемент Ω_n с вершинами $n1, n2, n3$.

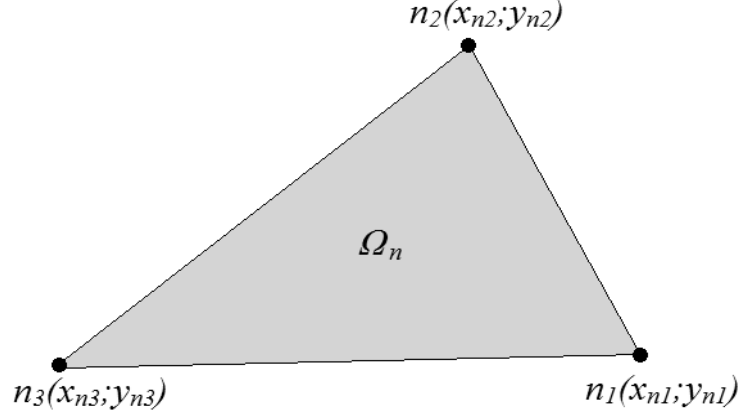


Рис. 5. – Треугольный конечный элемент

Слабая формулировка для уравнения (1) с учетом граничных условий (10)-(13) для каждого конечного элемента $\Omega_n \in H_h$ с объемом V_n и границей Γ_n имеет вид

$$\begin{aligned}
 & - \int_{V_n} \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) dV_n + \int_{\Gamma_{in}} L_\alpha q_p d\Gamma_{in} + \int_{V_n} L_\alpha \left(- \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) dV_n + \\
 & - \int_{V_n} \rho \left(\left[\frac{\partial L_\alpha}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial L_\alpha}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right) dV_n + \int_{\Gamma_{top}} L_\alpha \left(\rho \left[n_y \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right) d\Gamma_{top} = 0,
 \end{aligned} \tag{32}$$

где $L_\alpha \in H_h$ – весовая функция. Положим, что $p = L_\beta p_\beta$, тогда конечно-элементный алгебраический аналог (32) имеет следующий вид [27]

$$K_{\alpha\beta} p_\beta = F_{v\alpha} + F_{r\alpha} + F_{p\alpha}, \tag{33}$$

где

$$K_{\alpha\beta} = \int_{V_n} \left(\frac{\partial L_\alpha}{\partial x} \frac{\partial L_\beta}{\partial x} + \frac{\partial L_\alpha}{\partial y} \frac{\partial L_\beta}{\partial y} \right) dV_n, \quad F_{v\alpha} = \int_{V_n} L_\alpha \left(- \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) dV_n, \tag{34}$$

$$F_{r\alpha} = \int_{V_n} \rho \left(\left[\frac{\partial L_\alpha}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial L_\alpha}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \right) dV_n + \int_{\Gamma_{top}} L_\alpha \left(\rho \left[n_y \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \right) d\Gamma_{top}, \quad (35)$$

$$F_{p\alpha} = \int_{\Gamma_{in}} L_\alpha q_p d\Gamma_{in}. \quad (36)$$

Функции формы (весовые функции) определяются на треугольнике как

$$L_1 = \frac{(x_{n2}y_{n3} - x_{n3}y_{n2}) + x(y_{n2} - y_{n3}) + y(x_{n3} - x_{n2})}{2S_n}, \quad (37)$$

$$L_2 = \frac{(x_{n3}y_{n1} - x_{n1}y_{n3}) + x(y_{n3} - y_{n1}) + y(x_{n1} - x_{n3})}{2S_n}, \quad (38)$$

$$L_3 = \frac{(x_{n1}y_{n2} - x_{n2}y_{n1}) + x(y_{n1} - y_{n2}) + y(x_{n2} - x_{n1})}{2S_n}, \quad (39)$$

где

$$S_n = \frac{1}{2}((x_{n2} - x_{n1})(y_{n3} - y_{n1}) - (x_{n3} - x_{n1})(y_{n2} - y_{n1})). \quad (40)$$

Обозначим через b_α и c_α производные от функций формы

$$b_1 = \frac{\partial L_1}{\partial x} = \frac{y_{n2} - y_{n3}}{2S_n}, \quad b_2 = \frac{\partial L_2}{\partial x} = \frac{y_{n3} - y_{n1}}{2S_n}, \quad b_3 = \frac{\partial L_3}{\partial x} = \frac{y_{n1} - y_{n2}}{2S_n}, \quad (41)$$

$$c_1 = \frac{\partial L_1}{\partial y} = \frac{x_{n3} - x_{n2}}{2S_n}, \quad c_2 = \frac{\partial L_2}{\partial y} = \frac{x_{n1} - x_{n3}}{2S_n}, \quad c_3 = \frac{\partial L_3}{\partial y} = \frac{x_{n2} - x_{n1}}{2S_n}. \quad (42)$$

С учетом (33)-(42) дискретный аналог уравнения (32), выведенный с помощью метода конечных элементов [26], примет вид следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$K_{\alpha\beta} P_\beta = F_{v\alpha} + F_{r\alpha} + F_{p\alpha}, \quad (43)$$

где

$$K_{\alpha\beta} = -S_n \begin{pmatrix} b_1b_1 + c_1c_1 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_2b_1 + c_2c_1 & b_2b_2 + c_2c_2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_3b_1 + c_3c_1 & b_3b_2 + c_3c_2 & b_3b_3 + c_3c_3 \end{pmatrix}, \quad F_{v\alpha} = \alpha_v \frac{S_n \rho}{3\sigma} A_v \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

$$F_{r\alpha} = \alpha_r \frac{S_n \rho}{3} \begin{pmatrix} b_1 w(u) + c_1 w(v) \\ b_2 w(u) + c_2 w(v) \\ b_3 w(u) + c_3 w(v) \end{pmatrix} - \alpha_r \frac{l_n \rho}{2} \begin{pmatrix} n_x w(u) + n_y w(v) \\ n_x w(u) + n_y w(v) \\ n_x w(u) + n_y w(v) \end{pmatrix}, \quad F_{p\alpha} = \frac{q_p l_n}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$A_v = ((b_1 u_{n1} + b_2 u_{n2} + b_3 u_{n3}) + (c_1 v_{n1} + c_2 v_{n2} + c_3 v_{n3})), \quad (46)$$

$$w(u) = (b_1 u_{n1} + b_2 u_{n2} + b_3 u_{n3})(u_{n1} + u_{n2} + u_{n3}) + (c_1 u_{n1} + c_2 u_{n2} + c_3 u_{n3})(v_{n1} + v_{n2} + v_{n3}), \quad (47)$$

$$w(v) = (b_1 v_{n1} + b_2 v_{n2} + b_3 v_{n3})(u_{n1} + u_{n2} + u_{n3}) + (c_1 v_{n1} + c_2 v_{n2} + c_3 v_{n3})(v_{n1} + v_{n2} + v_{n3}). \quad (48)$$

6. Описание турбулентного течения у стенки

Модель турбулентности $k - \varepsilon$ описывает течение с развитой турбулентностью, где турбулентное число Рейнольдса $Re_t = \frac{u' l_t}{\eta} = \frac{k^2}{\varepsilon \eta} \gg 1$ [28]. Вблизи твердой стенки находится вязкий подслой, где турбулентные пульсации затухают и турбулентное число Рейнольдса мало, поэтому в пристеночной области необходим другой способ расчета характеристик потока.

В настоящей работе используется метод пристеночных функций [28, 29, 18], который описывает течение в вязком и логарифмическом подслоях вблизи стенки с помощью полуэмпирических формул и не требует сильного сгущения расчетной сетки на границе.

Рассмотрим участок сетки с контрольным объемом вблизи твердой стенки, показанный на рис. 6. Узел P является центром пристеночного контрольного объема V_B , расстояние от стенки для узла P по нормали составляет Δu_P . Введем безразмерную вертикальную координату y^+ и безразмерную скорость u^+

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\eta}, \quad u^+(y^+) = \frac{u}{u_\tau}, \quad (49)$$

где u_τ – придонная горизонтальная скорость потока. В безразмерных координатах профиль скорости вблизи шероховатой стенки можно представить в виде [29, 30]

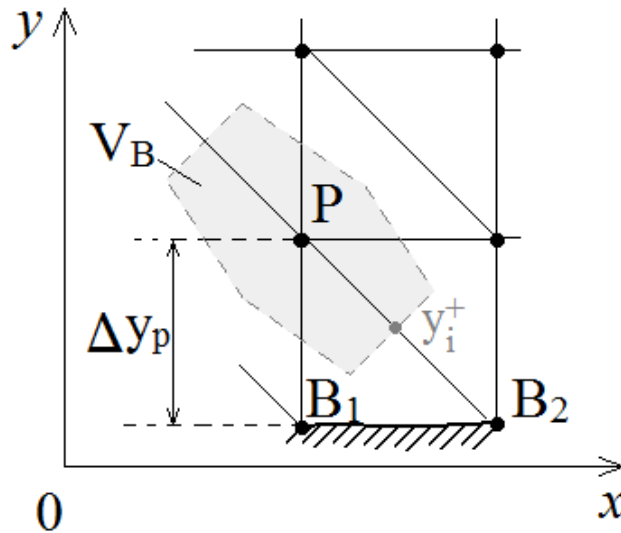


Рис. 6. – Пристеночный контрольный объем

$$u^+ = \begin{cases} y^+, & y^+ \leq y_*^+, \\ \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{y^+}{\Delta}\right) + 7.5, & y^+ > y_*^+, \end{cases} \quad (50)$$

где $\Delta = 0.6d$ – высота выступов шероховатости дна, d – диаметр частиц грунта, $\kappa = 0.4$ – постоянная Кармана, $y_*^+ = 39.56$. На рис. 7 показан профиль горизонтальной скорости в пристеночной области, явно видна граница разделения вязкого подслоя и логарифмического подслоя. Для определения подслоя, в который попадает узел с безразмерной координатой y_p^+ , введем функцию F [29]

$$F(y_p^+) = \int_0^{y_p^+} u^+(y^+) dy^+ = \frac{U y_p}{\eta}. \quad (51)$$

Если $F \leq 782.4968$, то узел P попадает в вязкий подслой, где y_p^+ определяется по формуле

$$y_p^+ = u^+ = \sqrt{2F}, \quad (52)$$

если $F > 782.4968$, то узел P попадает в логарифмический подслой, где y_P^+ определяется итерационно по методу Ньютона

$$y_{j+1}^+ = y_j^+ + \frac{F - F_j}{u_j^+}, \quad F_j = \int u^+(y_j^+) dy^+ = \frac{1}{\kappa} y_j^+ \left(\ln \left(\frac{y_j^+ \exp(7.5\kappa)}{\Delta} \right) - 1 \right) + C, \quad (53)$$

где $C = -683.559072$, F вычисляется по формуле (51) и не меняется по ходу расчета, переменные с индексом j определяются по значению y_j^+ на текущей итерации, в качестве начального значения ($j = 0$) выбирается $y_0^+ = y_*^+$. Для сходимости метода обычно хватает около 5-и итераций.

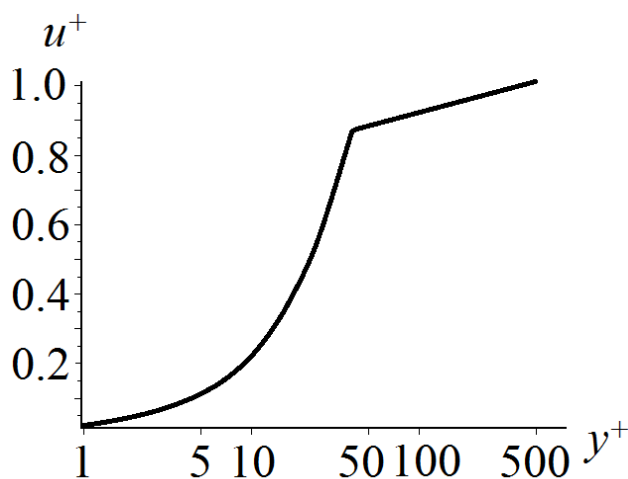


Рис. 7. – Профиль горизонтальной скорости у дна

6.1. Алгоритм применения метода пристеночных функций

1. Определим y_P^+ во всех пристеночных узлах с применением методики, описанной выше

$$y_P^+ = \begin{cases} \sqrt{2F}, & F_* \leq 782.4968, \\ y_{j+1}^+ \text{ по формуле (53)}, & F > 782.4968. \end{cases} \quad (54)$$

2. Найдем u_τ по формуле [29]

$$u_\tau = \frac{y_P^+}{\Delta y_P} \eta. \quad (55)$$

3. Найдем τ_w [28, 29]

$$\tau_w = u_\tau^2 \rho. \quad (56)$$

4. Выполним расчет кинетической энергии турбулентности по формуле (30) с граничными условиями (10)-(13), при расчете k в пристеночных узлах учитываем положение узла P следующим образом [28]

$$P_{kP} = \begin{cases} 0, & y_P^+ \leq y_*^+, \\ \varepsilon, & y_P^+ > y_*^+. \end{cases} \quad (57)$$

5. Выполним расчет диссипации турбулентности ε по формуле (31) с граничными условиями (10)-(13) во всех узлах расчетной сетки за исключением пристеночных узлов. В пристеночных узлах диссипацию турбулентности рассчитаем по следующей формуле [28]

$$\varepsilon_P = \begin{cases} \frac{2\eta_{mol}k_P}{\Delta y_P^2}, & y_P^+ \leq y_*^+, \\ \frac{C_\mu^{3/4}k_P^{3/2}}{\kappa\Delta y_P}, & y_P^+ > y_*^+. \end{cases} \quad (58)$$

6. Выполним расчет скоростей потока по формулам (28)-(29) с граничными условиями (10)-(13) во всех узлах за исключением пристеночных. В пристеночном узле P рассчитаем скорости потока с помощью модифицированного дискретного аналога [28], учитывающего логарифмический профиль скорости у стенки,

$$u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{S} \sum_{i=1/2}^{m-1/2} \left[-u^2 n_x - uv n_y - \frac{1}{\rho} p n_x + D + \left(2u\omega_x + \frac{2}{3}\omega_k \right) n_x + (v\omega_x + u\omega_y) n_y \right] L_{ki+1/2}, \quad (59)$$

$$D = \begin{cases} -\frac{2}{3}\eta_{mol} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_x + \frac{\tau_w}{\rho} n_y, & y_i^+ \leq y_L^+, \\ \eta \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) n_x + \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_y - \frac{2}{3} k n_x, & y_i^+ > y_L^+; \end{cases} \quad (60)$$

$$v^{n+1} = v^n + \frac{\Delta t}{S} \sum_{i=1/2}^{m-1/2} \left[-uv n_x - v^2 n_y - \frac{1}{\rho} p n_y + D + (v\omega_x + u\omega_y) n_x + \left(2v\omega_y + \frac{2}{3}\omega_k \right) n_y \right] L_{ki+1/2}, \quad (61)$$

$$D = \begin{cases} \frac{\tau_w}{\rho} n_x - \frac{2}{3} \eta_{mol} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_y, & y_i^+ \leq y_L^+, \\ \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_x + \eta \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) n_y - \frac{2}{3} k n_y, & y_i^+ > y_L^+; \end{cases} \quad (62)$$

где $y_L^+ = 250$ – граница разделения областей логарифмического подслоя и основного потока [18], y_i^+ – это координата точки пересечения общей грани треугольников с линией, соединяющей их центры масс (т.е. $P_{3/2}$ в соответствии с рис. 4).

При использовании метода пристеночных функций по Волкову [18], профиль скорости (50) определяется следующим образом

$$u^+ = \begin{cases} y^+, & y^+ \leq y_*^+, \\ \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + 5.45, & y^+ > y_*^+; \end{cases} \quad y_*^+ = 11, \quad (63)$$

первый и второй шаги алгоритма пропускаются, на третьем шаге касательное напряжение определяется по формуле [18]

$$\tau_w = \frac{\rho_w C_\mu^{1/4} k^{1/2} u_P}{\frac{1}{\kappa} \ln \text{Re} + 5.45}, \quad \text{Re} = \frac{C_\mu^{1/4} k^{1/2} \Delta y_P}{\eta}. \quad (64)$$

При применении метода пристеночных функций по Снегиреву [28] профиль скорости (50) определяется следующим образом

$$u^+ = \begin{cases} y^+, & y^+ \leq y_*^+, \\ \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + 5.54, & y^+ > y_*^+; \end{cases} \quad y_*^+ = 11.5, \quad (65)$$

на первом шаге алгоритма y_P^+ определяется по формуле [28]

$$y_P^+ = \frac{C_\mu^{1/4} \sqrt{k_P} \Delta y_P}{\eta}, \quad (66)$$

на втором шаге придонная горизонтальная скорость определяется как [28]

$$u_\tau^2 = \begin{cases} \eta_{mol} \frac{u_P}{\Delta y_P}, & y_P^+ \leq y_*^+, \\ \sqrt{C_\mu k_P}, & y_P^+ > y_*^+. \end{cases} \quad (67)$$

7. Верификация модели

С помощью предложенной математической постановки выполнено численное решение задачи о течении жидкости над 6-ю пологими песчаными дюнами. Форма дюн, характеристики канала и потока взяты из экспериментальной работы [15], расчетная область задачи схематично показана на рис. 8, поток воды движется слева направо. Геометрические характеристики пологой дюны показаны на рис. 9, буквой c обозначен пик (crest) дюны, буквой b – край гребня дюны (brink). Решение выполнялось при следующих параметрах: $Re=124\ 000$, $Fr=0.443$, $U_{max}=0.62$ м/с, $H=0.2$ м, $\rho=1000$ кг/м³, $d=0.00016$ м, $L=58.9$ м, $L_1=40$ м, $L_2=0.9$ м, $L_3=13.5$ м, $\sigma=0.0001$ с, $\alpha_r = \alpha_v = 1$, шаг по времени $dt=0.0001$ с, шаг сетки $dx = dy = 0.01$ м, время расчета – 360 с.

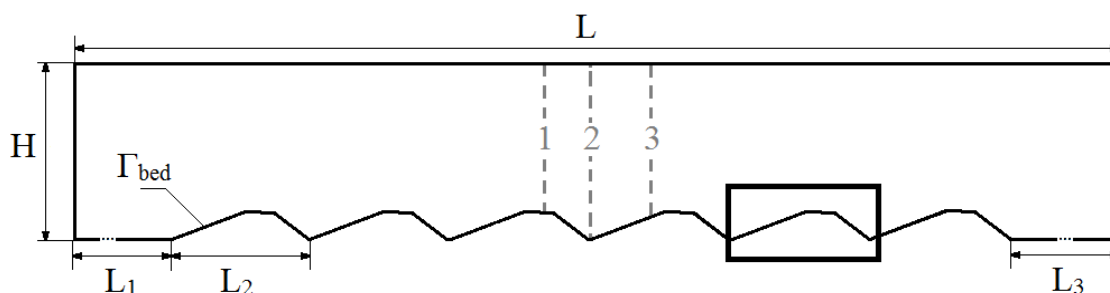


Рис. 8. – Расчетная область рассматриваемой задачи

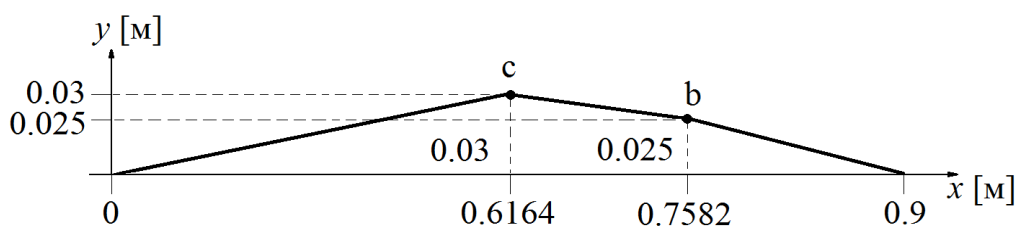


Рис. 9. – Схема донной дюны (фрагмент, выделенный прямоугольником на рис. 8)

На рис.10 (а, б, в) представлены графики горизонтальной и вертикальной скоростей, в вертикальных сечениях, показанных на рис. 8 серыми пунктирными линиями (1 – 42.47 м, 2 – 42.7 м, 3 – 43.3 м). На рис. 10

показаны расчетные данные, полученные с применением пристеночной функции по Волкову [18] (сплошные линии), расчетные данные, полученные с применением пристеночной функции по Гришанину [30] и Луцкому [29] (пунктирные линии), данные из эксперимента [15] (точечные множества). Из графиков видно, что расчетные поля скоростей хорошо согласуются с экспериментом, наибольшая погрешность расчетных данных наблюдается в пристеночной области в сечениях 1 и 3 (Рис 10(а) и Рис. 10(в)), что связано с недостаточно мелким размером сетки у дна. Отметим, что расчетные профили горизонтальной скорости, полученные по разным пристеночным функциям, незначительно отличаются друг от друга, профили по Гришанину имеют более выраженный изгиб в пристеночной области по сравнению с профилями по Волкову. Средняя относительная погрешность расчетной горизонтальной и вертикальной скоростей в срезе 1 составляет 5.55% и 17.61% соответственно, в срезе 2 – 2.05% и 21.27%, в срезе 3 – 2.13% и 31.55%.

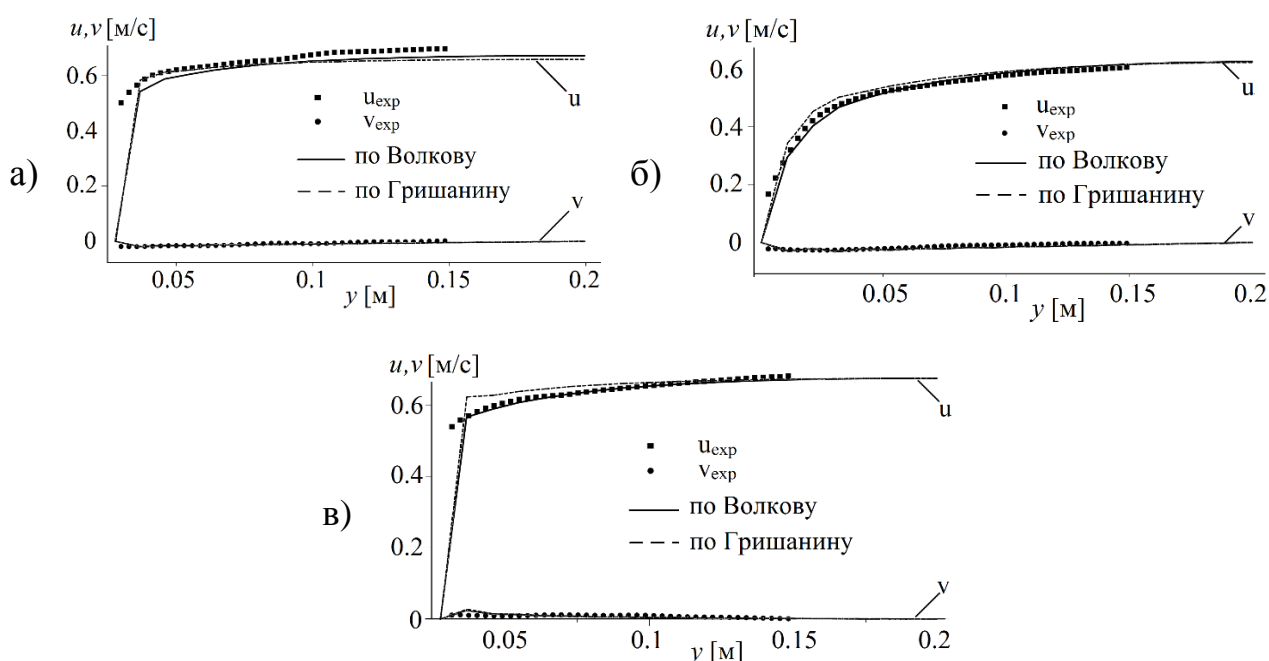


Рис. 10 – (а,б,в) Графики горизонтальной и вертикальной скоростей в сечениях а) – 1, б) – 2, в) – 3, линии – расчетные данные, точки – экспериментальные данные [15]

На рис.11 (а, б) показаны графики придонного касательного напряжения τ над дюнной донной поверхностью Γ_{bed} . Сплошными линиями показаны профили расчетного касательного напряжения, τ_1 - напряжение, полученное в придонной расчетной ячейке по формулам (56) и (64), τ_2 - напряжение, полученное в 2 см от дна (2-я расчетная ячейка от дна). Точечным множеством τ_{exp} показаны экспериментальные значения [15] в области придонной расчетной ячейки. На рис.11 (а) показаны расчетные профили, полученные с применением пристеночной функции по Волкову [18], на рис. 11 (б) – по Гришанину [30] и Луцкому [29]. Из сравнения графиков видно, что расчетные значения τ_1 качественно не согласуются с экспериментальными значениями для обеих моделей. Максимум напряжений в эксперименте [15] наблюдается в области минимального уровня дна (между дюнами), в расчетах авторов максимум напряжений τ_1 находится в области максимума донной поверхности (первый и второй пик дюны). При этом, расчетные напряжения, полученные в следующей расчётной ячейке τ_2 , качественно и количественно согласуются с данными экспериментальными значениями. Следует отметить, что напряжение по Гришанину по абсолютным значениям меньше, чем по Волкову, несмотря на то, что пристеночная функция по Гришанину описывает течение по шероховатой песчаной поверхности, а функция по Волкову – по гладкой. Профиль напряжений τ_2 , полученный по Волкову согласуется с экспериментальными данными со средней относительной погрешностью 6.84%.

Профиль напряжений τ_1 не согласуется с экспериментальными данными [15]. Но обнаружено, что τ_1 качественно согласуется с расчетами и экспериментальными наблюдениями других авторов [31, 32], когда максимум профиля касательных напряжений τ_1 находится в окрестности вершины дюны или немного отстает от нее (см. рис. 12).

Данный факт позволяет предположить, что экспериментальные данные [15] могут быть зафиксированы немного дальше от дна, чем указано в работе.

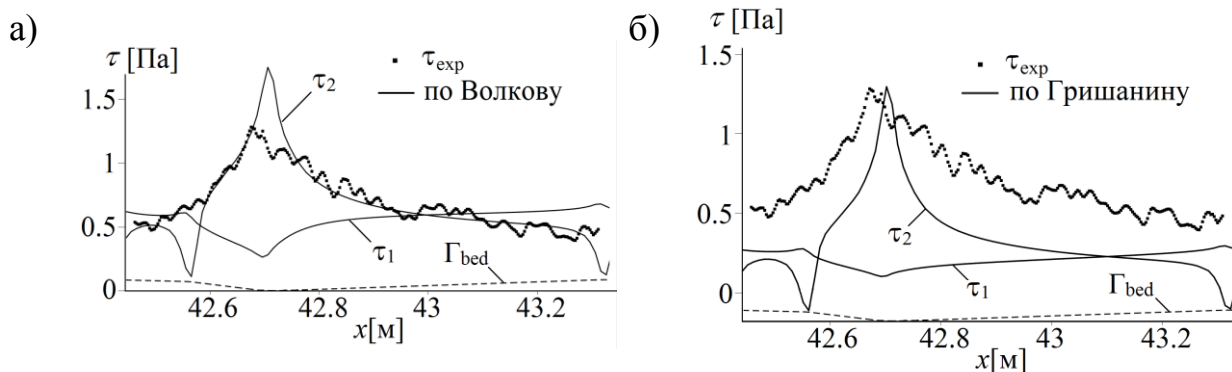


Рис. 11. – Графики касательного напряжения τ над дюнной донной поверхностью ζ , линии – расчетные данные, точки – экспериментальные данные [15]

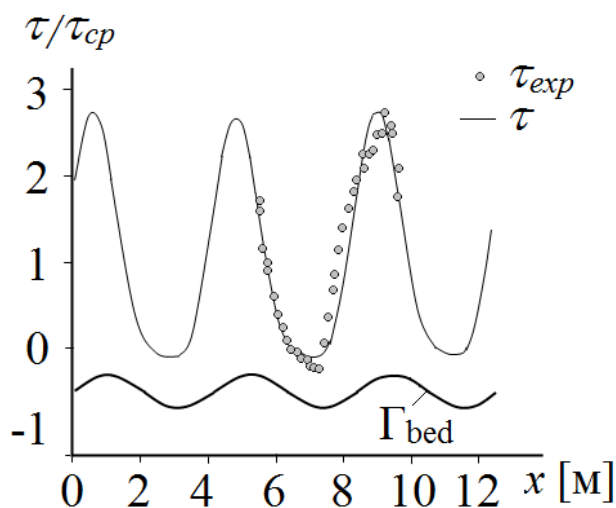


Рис. 12 – Осреднённое придонное касательное напряжение, полученное экспериментально [32] и в результате прямого (DNS) моделирования [31]

На рис. 13 представлены профили кинетической энергии турбулентности и генерации турбулентности в сечениях 1 и 2 (в сечении 3 экспериментальные данные отсутствуют). На рисунке показаны расчетные профили, полученные по предложенной модели с применением пристеночной функции по Волкову [18] (сплошные линии), расчетные профили с применением пристеночной функции по Гришанину [30] и Луцкому [29] (пунктирные линии), экспериментальные данные [15] (точечные множества). Из сравнения графиков кинетической энергии видно,

что предложенная модель только качественно согласуется с экспериментом. Значения кинетической энергии, полученные по предложенной модели с пристеночной функцией по Волкову в 3.8-5.9 раз меньше, чем экспериментальные значения, расчеты по Гришанину меньше экспериментальных значений в 6.56-11 раз. Таким образом, значения кинетической энергии по Гришанину почти в 2 раза меньше, чем по Волкову, и по напряжениям значения по Гришанину почти в 2 раза меньше, чем по Волкову. При сравнении графиков генерации турбулентности также видно качественное согласование с экспериментом, но по абсолютным значениям расчетные данные превышают экспериментальные данные в 2.2-4.5 раза (расчеты по Гришанину превышают в 0.9-3.07 раз).

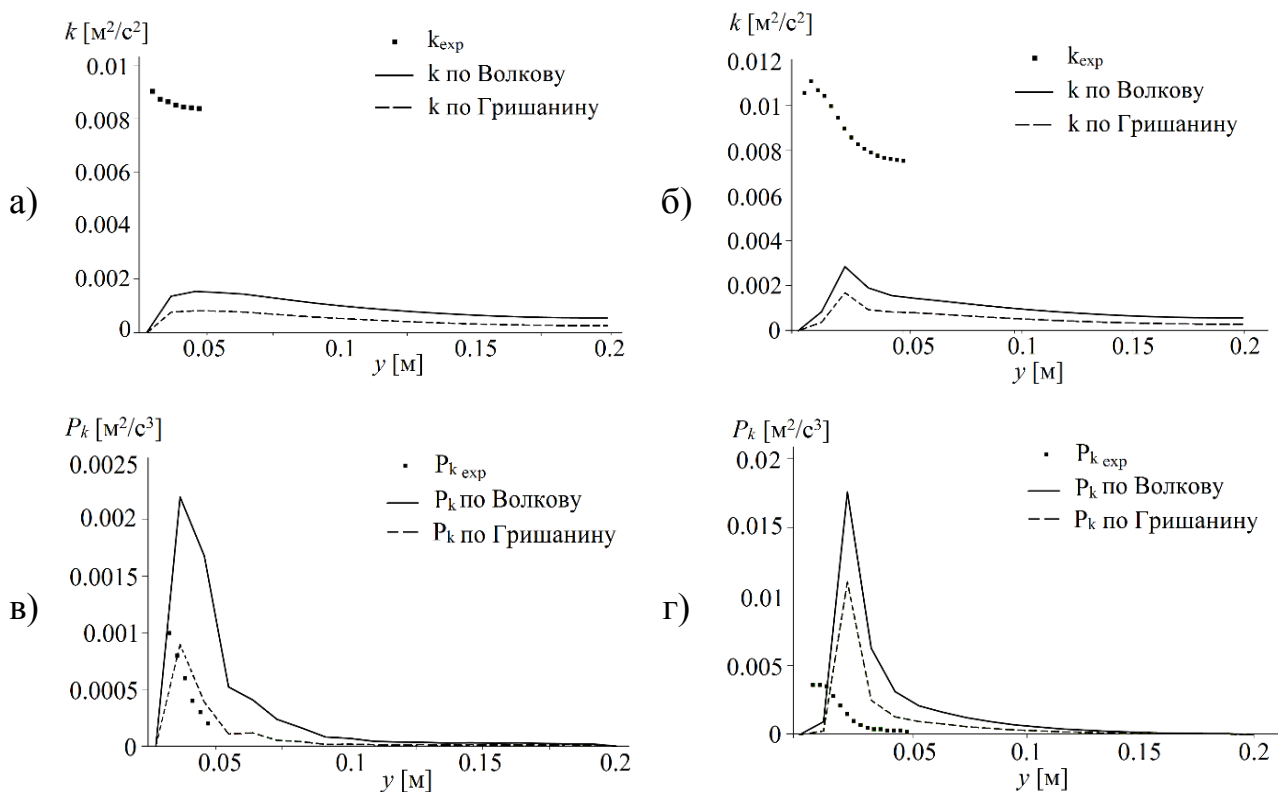


Рис. 13. – Графики кинетической энергии турбулентности (а, б) и генерации турбулентности (в, г) в сечении 1 (а, в) и сечении 2 (б, г)

Таким образом, авторами было получено хорошее согласование расчетов во всей расчетной области, за исключением пристеночной области.

Выявлено, что использование разных пристеночных функций и техник их применения значительно влияет на абсолютные значения искомых величин в придонной области. Значения кинетической энергии, генерации турбулентности, касательных напряжений могут варьироваться в несколько раз в зависимости от вида используемой пристеночной функции. При этом профиль горизонтальной скорости зависит от используемой пристеночной функции только в пристеночной области. Для рассматриваемой задачи наилучшее согласование с экспериментом получено при использовании пристеночной функции по Волкову, средняя относительная погрешность в различных вертикальных сечениях находится в диапазоне 2.05-5.55 % для горизонтальной скорости, 17.61-31.55 % - для вертикальной скорости, 21.09-93.18 % - для генерации турбулентности, 72.27-88.09 % - для кинетической энергии турбулентности. Для повышения точности расчетов авторы планируют отказаться от использования метода пристеночных функций и использовать другие методы расчета характеристик потока вблизи стенки.

Заключение

В работе предложена математическая модель задачи о движении двумерного турбулентного потока над неподвижными пологими песчаными дюнами. Математическая модель включает в себя уравнения Рейнольдса и уравнения стандартной модели турбулентности $k-\varepsilon$, приведенные к квазигидродинамическому виду [16].

Разработан алгоритм решения задачи, включающий метод контрольных объемов для определения поля скоростей, кинетической энергии и диссипации турбулентности и метод конечных элементов для определения поля давления.

Выполнен анализ применимости различных пристеночных функций для моделирования движения турбулентного потока над неподвижными пологими песчаными дюнами. Показано, что пристеночная функция Волкова

позволяет получить наилучшее согласование численного решения с экспериментальными данными.

Необходимо отметить, что представленная математическая модель позволила получить лишь качественное согласованное численного решения для кинетической энергии турбулентности с экспериментальными данными. В связи с чем, авторы планируют выполнить дополнительные исследования предложенной модели, в частности, применение других методов расчета характеристик потока вблизи стенки.

В разработанном программном комплексе операции по расчету u , v , k , ε , η выполняются в параллельном режиме с использованием оборудования ЦКП «Центр данных ДВО РАН» [33].

Библиографические ссылки

1. Best, J. (2005) The fluid dynamics of river dunes: A review and some future research directions // Journal of geophysical research, 110, F04S02.

2. Venditti, J. G. (2013), Bedforms in sand-bedded rivers // Treatise on Geomorphology: edited by J. Shroder and E. Wohl. – pp. 137–162, Academic Press, San Diego, Calif.

3. Nelson, J. M., S. R. McLean, and S. R. Wolfe (1993), Meanflow and turbulence fields over two-dimensional bedforms, Water Resour. Res., 29, 3935–3953.

4. Coleman, S. E., and V. I. Nikora (2011), Fluvial dunes: Initiation, characterization, flow structure // Earth Surf. Processes Landforms, 36(1), 39-57.

5. Bradley, R. W., J. G. Venditti, R. A. Kostaschuk, M. Church, M. Hendershot, and M. A. Allison (2013), Flow and sediment suspension events over low-angle dunes: Fraser Estuary, Canada, J. Geophys. Res. Earth Surf., 118, doi:10.1002/jgrf.20118.

6. Roden, J. E. (1998), The sedimentology and dynamics of mega-dunes, Jamuna River, Bangladesh, Ph.D. thesis, 310 pp., Dep. of Earth Sci., Univ. of Leeds, Leeds, U. K.

7. Cisneros, J., and J. Best (2016), Low angle dunes in big rivers morphology occurrence and speculations on their origin // Marine and River Dune Dynamics Conf. Papers (MARIDV), 4-5 April 2016 – North Wales, UK. – pp. 37-40.
8. Carling, P. A., J. J. Williams, E. Götz, and A. D. Kelsey (2000b), The morphodynamics of fluvial sand dunes in the River Rhine, near Mainz, Germany. II. Hydrodynamics and sediment transport // *Sedimentology*, 47, 253–278.
9. Best, J. L., and R. A. Kostaschuk (2002), An experimental study of turbulent flow over a low-angle dune // *J. Geophys. Res.*, 107(C9), 3135.
10. Smith, J. D., and S. R. McLean (1977), Spatially averaged flow over a wavy surface // *J. Geophys. Res.*, 82, 1735–1746.
11. Shugar, D. H., R. A. Kostaschuk, J. L. Best, D. R. Parsons, S. N. Lane, O. Orfeo, and R. J. Hardy (2010), On the relationship between flow and suspended sediment transport over the crest of a sand dune, Río Paraná, Argentina // *Sedimentology*, 57(1), 252–272.
12. van Rijn, L. C. (1996, Combining laboratory, field, and mathematical modeling research for bed forms, hydraulic roughness, and sediment transport during floods // *Issues and Directions in Hydraulics*, T. Nakato and R. Ettema, eds., Balkema, Rotterdam, 55–73.
13. Paarlberg, A. J., C. M. Dohmen-Janssen, S. J. M. H. Hulscher, P. Termes, and R. Schielen (2010), Modelling the effect of time-dependent river dune evolution on bed roughness and stage // *Earth Surf. Processes Landforms*, 35(15), 1854–1866.
14. Huthoff, F. (2012), Theory for flow resistance caused by submerged roughness elements, *J. Hydraul. Res.*, 50(1), 10–17.
15. Kwoil, E., Venditti J.G., Bradley R.W., Winter C. Flow structure and resistance over subaqueous high- and low-angle dunes // *Journal of Geophysical Research. Earth Surface*, 2016. – V. 121. – P. 545–564.
16. Елизарова Т.Г., Никольский П.Н. Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в течении за обратным уступом // *Вестник Московского университета. Серия 3*, 2007. – №4. – С.14-17.

17. Wilcox, David C (1998). "Turbulence Modeling for CFD". Second edition. Anaheim: DCW Industries, 1998. pp. 174.
18. Волков К.Н. Пристеночное моделирование в расчетах турбулентных течений на неструктурированных сетках // Теплофизика и аэромеханика, 2007. – Т. 14, № 1. – С. 113-129.
19. Stigler J. Introduction of the analytical turbulent velocity profile between two parallel plates // 18th International conference Engineering Mechanics, Czech Republic, 2012. Paper № 148. P.1343-1352.
20. Nezu I., Rodi W. Open-channel flow measurements with a laser Doppler anemometer // J. Hydraul. Eng., 1986 – V. 112. – P. 335-355.
21. R. Absi, H. Tanaka, L. Kerlidou and A. André Eddy viscosity profiles for wave boundary layers: Validation and calibration by a $k-\omega$ model // Coastal Engineering Proceedings, 2012. 11 p. DOI: 10.9753/icce.v33.waves.63
22. Hsieh K.-J., Lien F.-S., Yee E. Towards a Unified Turbulence Simulation Approach for Wall-Bounded Flows // Flow Turbulence Combust, 2010. – V. 84. – P. 193–218. DOI 10.1007/s10494-009-9220-4
23. Jamil M.M., Adamu M.I., Ibrahim T.R, Hashim G.A. Numerical Study of Separation Length of Flow through Rectangular Channel with Baffle Plates // Journal of Advanced Research Design, 2015. – Vol. 7, No.1. – P. 19-33.
24. Hirschel E.H. Three-Dimensional Attached Viscous Flow: Basic Principles and Theoretical Foundations // Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2014. XIV, 391 p. DOI 10.1007/978-3-642-41378-0.
25. Елизарова Т.Г. Лекции Математические модели и численные методы в динамике жидкости и газа. Подходы, основанные на системах квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. – М.: Физический факультет МГУ, 2005. – 224 с.
26. Коноур Д., Бребиа К. Метод конечных элементов в механике жидкости. – Л: Судостроение, 1979. – 263 с.
27. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. – М.: Мир, 1988.

28. Снегирёв А.Ю. Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009. – 143 с
29. Луцкий А.Е., Северин А.В. Простейшая реализация метода пристеночных функций // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2013. – № 38. – 22 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-38>
30. Гришанин К.В. Динамика русловых потоков. / под. ред. З.М. Кожинной – Л.: Гидрометеоздат, 1979. – 311 с.
31. De Angelis V., Lombardi P., and Banerjee S. Direct numerical simulation of turbulent flow over a wavy wall // *Phys. Fluids*, 1997. – V. 9, № 8. – P. 2429-2442.
32. Zilker D.P., Cook G.W., Hanratty T. Influence of the amplitude of a solid wavy wall on a turbulent flow. Part I. Non-separated flows // *J. Fluid Mech*, 1977. – V. 82. – P. 29-51.
33. Сорокин А.А., Макогонов С.В., Королев С.П. Информационная инфраструктура для коллективной работы ученых Дальнего Востока России // Научно-техническая информация. Серия 1: Организация и методика информационной работы. 2017. № 12. С. 14-16.

Оглавление

Введение.....	3
1. Математическая постановка задачи.....	3
2. Граничные условия.....	6
3. Дискретизация расчетной области.....	7
4. Алгоритм решения уравнений переноса.....	11
5. Алгоритм решения уравнения для давления.....	12
6. Описание турбулентного течения у стенки.....	14
6.1. Алгоритм применения метода пристеночных функций.....	16
7. Верификация модели.....	19
6. Заключение.....	24